

$$\mathcal{E}G_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow AG_n(\mathbb{C})$$

valori
e propri

$\mathbb{P}^n \mathbb{R}$

$\mathbb{P}^n \mathbb{C}$

+ valori
e propri

+ valori
impropri

ortogonalità

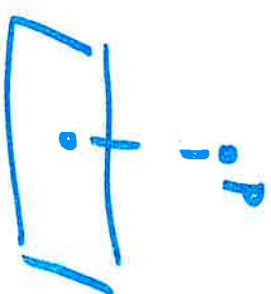
(e', m')

$$u = [P; b(e', m')]$$

(e, m)

$$v = [P; b(e, m)]$$

$$\cos \theta = \frac{(e, m) \cdot (e', m')}{\| (e, m) \| \| (e', m') \|}$$



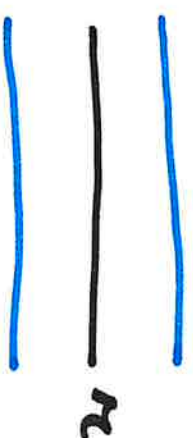
iperciano assiale fra 2 punti P, Q è il luogo dei punti

X tali che $d(P, X) = d(Q, X)$.

Siano r ed s due rette parallele $\Rightarrow V_{Q,P} \cap r: d(P, s) = d(Q, s)$



Il luogo dei punti a distanza d da una retta r nel piano sono 2 rette parallele.



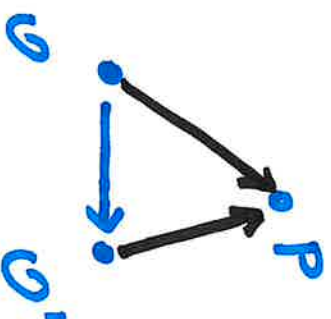
per $n=3$ viene un cilindro -



Riferimenti euclidei e movimenti rigidi:

$\Pi = (O, B)$ ^{ref.} euclideo $\Leftrightarrow B = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ base
ortogonale di $\mathbb{R}^n$

$$\Gamma' = (O', B')$$



$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$$

$$\vec{O'O}$$

$$[\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n] X = \underbrace{[-T' + [\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n'] X']}_{\vec{O'P}}$$

$$[e_1 \dots e_n] X = [\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n'] (X' - T')$$

$$T' = [\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n'] \begin{bmatrix} o_1' \\ \vdots \\ o_n' \end{bmatrix}$$

coordinate $\rightarrow$
di O rispetto O'

$$\text{se } [e_1' \dots e_n'] = [e_1 \dots e_n] A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = A(X' - T)$$

N.B. sia O_3 che O_3' sono ortogonali $\Rightarrow$
e normali

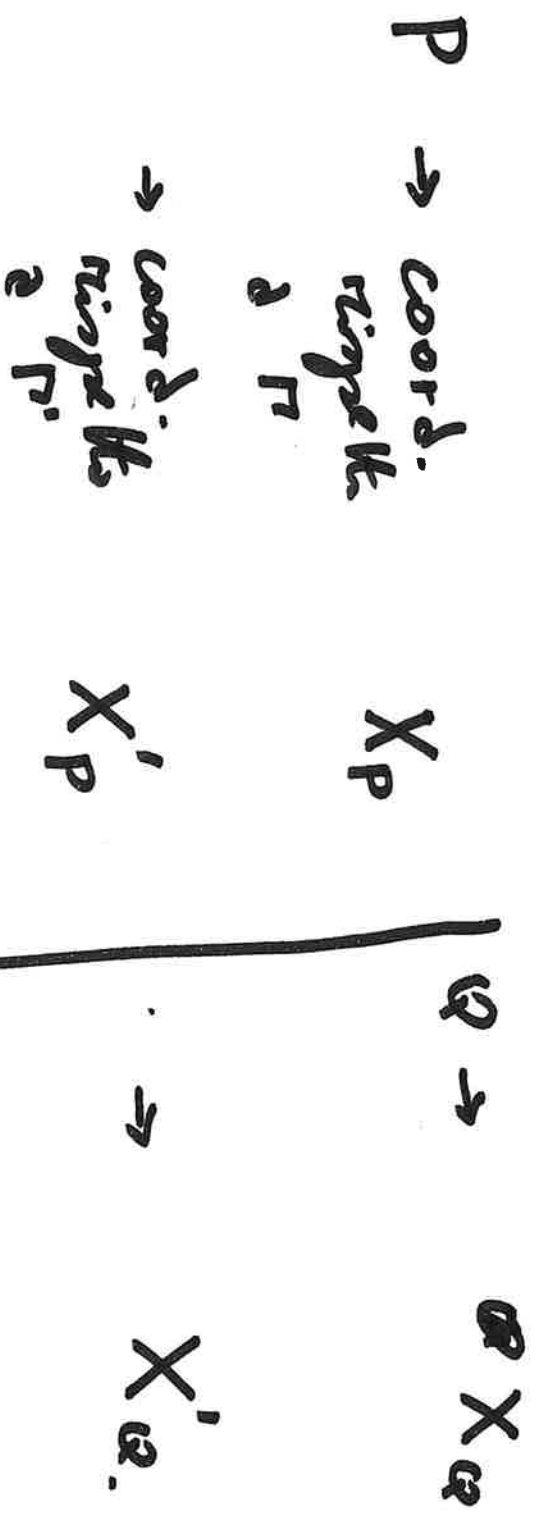
A è una matrice ortogonale $\Rightarrow$

$${}^t A = A^{-1}.$$

Inoltre il prod. scalare si scrive allo stesso modo rispetto O_3 e O_3' (dato dalla matrice identità).

Siano ora P, Q due punti di coord. rispettive

rispetto a O_3



$$X_P = A (X_P' - T)$$

$$d(P, Q) = \|X_Q - X_P\| =$$

$$X_Q = A (X_Q' - T)$$

$$= \|A (X_Q' - X_P')\| =$$

$$= \|X_Q' - X_P'\|$$

In particolare se invece che esubire il riferimento
consideriamo una trasformazione unitaria del tipo

$$X \rightarrow AX + T \quad \text{con } 'A = A^{-1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ottengo che la distanza tra fra i punti non
prende.

Inoltre poiché in $\mathbb{R}^2$ to
noi possiamo per ogni due vettori
 $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ scrivere

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \frac{1}{2} (\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 - \|\bar{u}\|^2 - \|\bar{v}\|^2).$$

$$\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 + 2\bar{u} \cdot \bar{v} \quad \downarrow$$

una funzione che preserva
la distanza euclidea, preserva
anche il prod. scalare ed in
particolare l'ortogonalità.

Le trasformazioni di $EG_n(\mathbb{R})$ del tipo

$$X \rightarrow AX + T$$

con A matrice ortogonale
sono dette isometrie.

$n=2$: come sono fatte?

1) Le riflessioni di asse una retta r
sono isometrie.



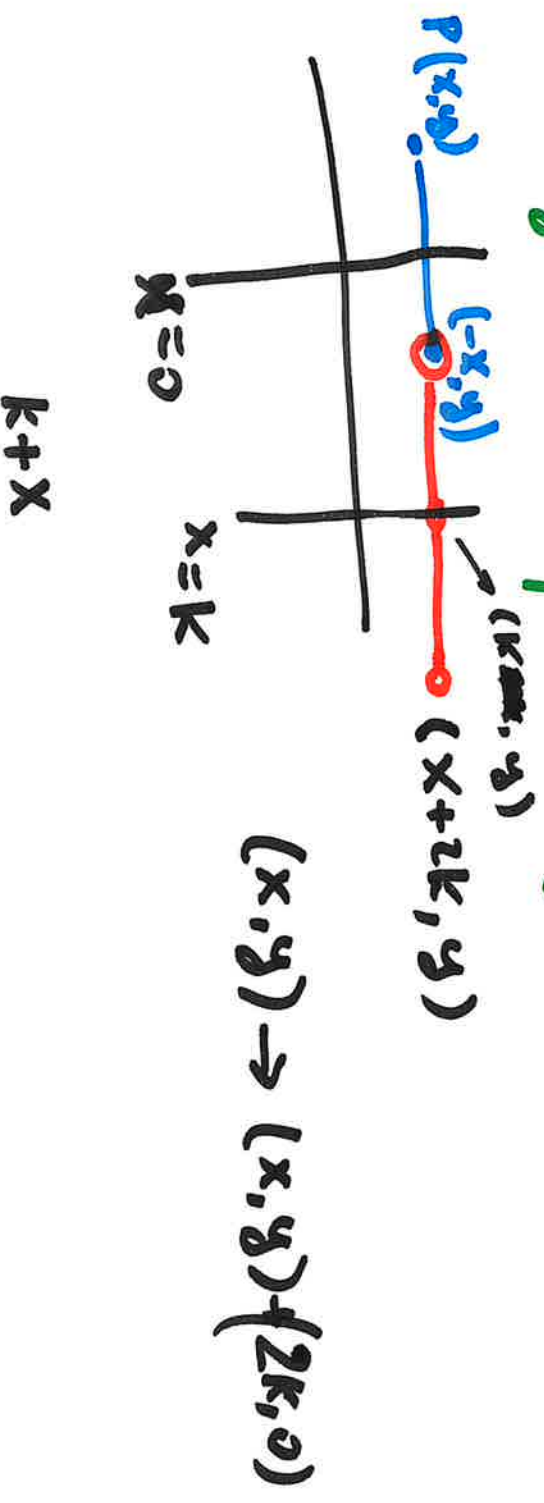
Scegliamo
un r.f. tale che
ne abbia es.
 $X=0$

ed osserviamo che si
ottiene una trasf. del tipo

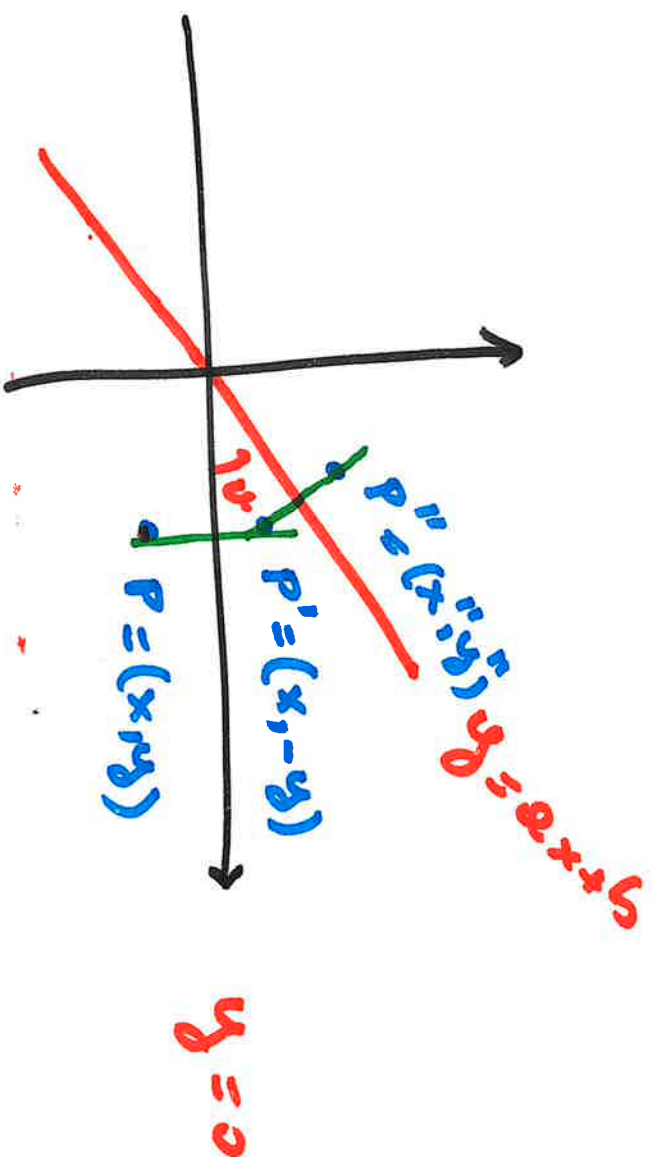
$$X \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

1) La composizione di più riflessioni è una isometria.

Oss: Una traslazione si può ottenere come prod. di 2 riflessioni con assi paralleli (ed è una traslazione in direzione ortogonale a quella degli assi).



ANCHE UNA ROTAZIONE SI PUÒ COSTRUIRE COME PRODOTTO DI 2 RIFLESSIONI



Una riflessione rispetto una retta per l'origine
 è descritta da una matrice ortogonale di $\det = -1$

Il prodotto di 2 è una matrice ortogonale di $\det = +1$
 $\Rightarrow$ una riflessione.

Le isometrie di $\det = +1$ sono dette movimenti rigidi del piano.

In $E\mathbb{G}_2(\mathbb{R})$ e consideriamo una curva algebrica di equazione $f(x, y) = 0$.

Al cambiare del riferimento di $E\mathbb{G}_2(\mathbb{R})$ cambierà pure l'equazione: $f'(x', y') = 0$

Osserviamo che
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + \alpha \\ cx + dy + \beta \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

In particolare $f(x, y)$ e $f(x', y')$ hanno lo stesso grado.

"Teoria": due curve $f(x,y)=0$ e $g(x,y)=0$
sono equivalenti se

$$V(f) = V(g)$$

oppure $\exists$ una trasformazione del primo tipo
che manda $V(f)$ in $V(g)$.

Esempio $x^2+y^2=1$ e $(x-2)^2+(y-3)^2=1$

Allora $(x^2+y^2)=1$ è equivalente a $(x^2+y^2)^3=1$?

$$(x^2+y^2-1)^3=0$$

$$(x^2+y^2)=1$$

$$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+1)=0$$

Sul campo reale $\exists$ curve algebriche prive di punti
reali oppure che hanno solamente un numero
finito di punti $\rightarrow$ son sono difficili da studiare
nel caso che non c'è una corrispondenza
diretta

INSIEMI
PUNTI E
TALI CHE
ESISTE $f(x,y)$
CON $E = V(f)$



GIUSIEMÉ
DI FUNZIONI
DEFINITO A
PARTIRE DA
 $f(x,y)$ CHE
DESCRIVE E.

CIRCONFERENZA: luogo dei punti $L \in G_2(\mathbb{R})$ a distanza r_0
dal centro (x_c, y_c)

$$\rightarrow (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r_0^2$$

equazione generica

$$x^2 + 2\alpha x + y^2 + 2\beta y + \gamma = 0$$

Caso in cui $\gamma = \alpha^2 + \beta^2$

$$(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 = 0$$

3! soluzioni $(x, y) = (-\alpha, -\beta) = c$

Se $\gamma > \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow$ non esistono soluzioni.
in $EG_2(\mathbb{R})$.

$\rightarrow$ per capire meglio la geometria si può lavorare su $\mathbb{C}$.

$$\mathcal{E}G_n(\mathbb{R}) \subseteq AG_n(\mathbb{C})$$

diciamo che un punto di $AG_n(\mathbb{C})$ è reale e $P = \bar{P}$ ovvero

1) FISSATO UN RIFERIMENTO EUCLIDEO IN $\mathcal{E}G_n(\mathbb{R})$ CONSIDERIAMO LA FUNZIONE

$$\psi: \mathcal{E}G_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

$$P = (x_1 \dots x_n) \longrightarrow (x_1 \dots x_n)$$

2) Si vede che ψ è invertibile; manda un punto $P \in \mathcal{E}G_n(\mathbb{R})$ in un punto $\psi(P)$ in $\mathbb{C}^n$

con $\psi(P) = \overline{\psi(P)}$ ove $\overline{\psi(P)} = (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$.

3) L'immagine di ψ è proprio l'insieme di tutti i punti

di $\mathbb{C}^n$ coniugati o se stessi.

$$\forall Q \in \mathbb{C}^n : Q = \overline{Q} \Leftrightarrow Q \in \mathbb{R}^n.$$

I punti "reali" di $\mathbb{C}^n$ sono quelli autoconiugati:

$$X = (x_0, \dots, x_n)$$

a coefficienti.

Se abbiamo un polinomio $f(\cancel{x})$ a coefficienti reali consideriamo $V_{\mathbb{C}}(f)$ come l'insieme di tutti i punti di $\mathbb{C}^n$ tali che le loro coordinate soddisfanno l'equazione.

In particolare $V_{\mathbb{R}}(f) \subseteq V_{\mathbb{C}}(f)$ ove $V_{\mathbb{R}}(f) =$ insieme dei punti reali di $V_{\mathbb{C}}(f)$.

in $E_{G_1}(\mathbb{R})$

$$\kappa: 3x + 2y = 0$$

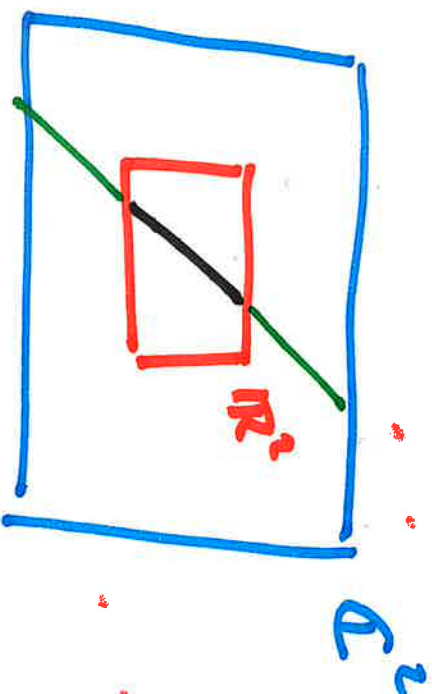
$$(-2, 3) \in \kappa$$

→ in $\mathbb{C}^2$

$$\tilde{\kappa}: 3x + 2y = 0 \quad \equiv 3xi + 2yi = 0$$

$$(-2, 3) \in \tilde{\kappa}$$

$$(-2i, 3i) \in \tilde{\kappa}$$



oss: in generale una curva (ipersurf.) è definita a meno di coeff. di proporzionalità.

oss 2:

Sia

$$f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$$

osserviamo che

$$\overline{f(x, y)} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\forall x, y \in \mathbb{C}.$$

In particolare se $P \in \mathbb{C}^2$ soddisfa

$$f(x_P, y_P) = 0$$

allora vale anche

$$f(\bar{x}_P, \bar{y}_P) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{P} \text{ soddisfa } |f(x, y)| = 0.$$

$$P \in V_{\mathbb{C}}(f) \Leftrightarrow \bar{P} \in V_{\mathbb{C}}(f)$$

ovvero

$$V_{\mathbb{C}}(f) = \overline{V_{\mathbb{C}}(f)}.$$

Una curva algebrica (varietà)

E in $AG_2(\mathbb{C})$

$[in AG_n(\mathbb{C})]$ è detta

reale se

$$E = \bar{E}$$

ovv $\bar{E} = \{ \bar{P} : P \in E \}$.

$$3ix = 0 \rightarrow x = 0 \text{ reale.}$$

$$0: 3ix + 1 = 0 \rightarrow \text{non è reale}$$

$$\left(-\frac{1}{3i}, 1\right) \in E$$

$$\text{ma } \left(\frac{1}{3i}, 1\right) \notin E.$$

In generale se una curva algebrica è reale $\Rightarrow$
essa ammette una equazione a coeff. reali.

$$V_c(f) = \overline{V_c(f)} = V_c(\bar{f}) \Rightarrow V_c(f) = V_c(\bar{f})$$

$$\begin{aligned} 1) \quad \overline{V(f)} &= \{ (\bar{x}, \bar{y}) : f(x, y) = 0 \} = \{ (\bar{x}, \bar{y}) : \overline{f(x, y)} = 0 \} = \\ &= \{ (\bar{x}, \bar{y}) : \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \} = \{ (x, y) : \bar{f}(x, y) = 0 \} = \\ &= V(\bar{f}). \end{aligned}$$

2) DISTINGUIAMO 2 CASI

$$\begin{aligned} 1) \quad \bar{f} = -f &\Rightarrow f(x, y) = i \quad g(x, y) \text{ con } g(x, y) \in \mathbb{R}[x, y] \\ &\Rightarrow V_c(f) = V_c(g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \bar{f} \neq -f &\Rightarrow \text{consideriamo } \bar{f} + f \text{ come polinomio.} \\ \bar{f} + f &\in \mathbb{R}[x, y] \text{ con } \bar{f} + f \neq 0 \end{aligned}$$

se siamo lavorando in coordinate affini
possono essere problemi.

In fatti $\forall (x, y) : f(x, y) = \bar{f}(x, y) = 0$

$$\text{e ha } (f + \bar{f})(x, y) = 0$$

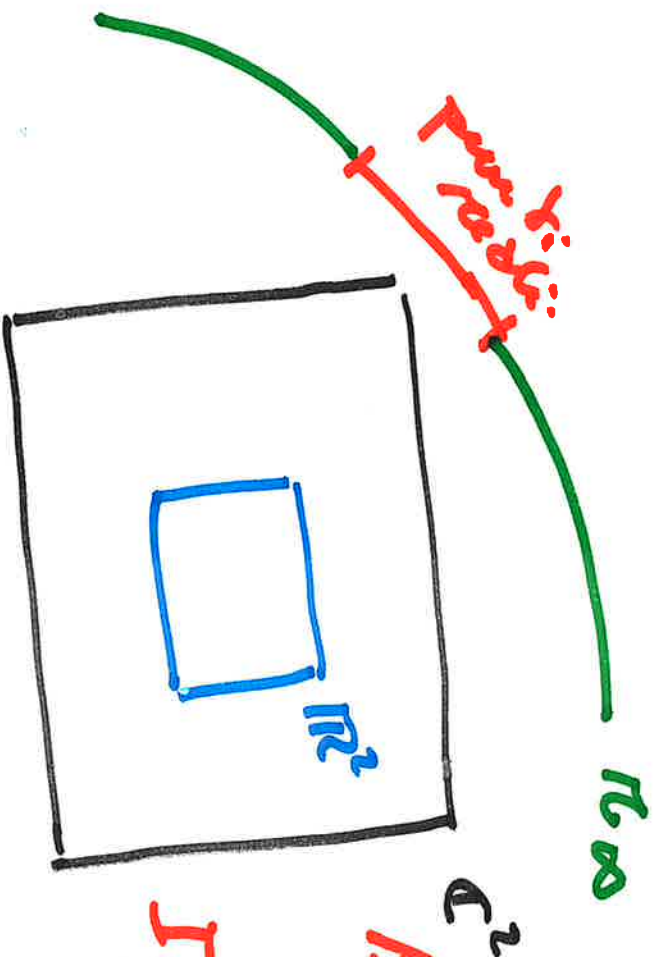
ma il viceversa potrebbe essere falso.

bisogna far vedere che ogni soluzione di

$$\sum (f_{ij} + \bar{f}_{ij}) x_i y_j = 0$$

$$\text{è soluzione di } \sum f_{ij} x_i y_j = 0$$

Se vogliamo passare ora all'implicamento primitivo



$\mathbb{C}^2$
 I punti di $\mathbb{P}^2 \mathbb{C}$
 sono sott. 1-dim di $\mathbb{C}^3$
 I punti di $\mathbb{P}^2 \mathbb{R}$ sono
 sott. 1-dim di $\mathbb{R}^3$

DICIAMO CHE UN PUNTO $P \in \mathbb{P}^n \mathbb{C}$ è reale

se e solamente se esso ammette una rappresentazione
 con mediana un vettore non nullo di $\mathbb{R}^{n+2}$
 cioè equivalentemente $P = \bar{P}$.

Chiamiamo reali i punti di $\mathbb{R}^n$ tali che

essi siano $\mathcal{L}_G((x_2 \dots x_{n+1}))$ con $(x_2 \dots x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

MA QUESTO EQUIVALE A DIRE CHE

$$\underline{\mathcal{L}_G((x_2 \dots x_{n+1}))} = \mathcal{L}_G((x_2 \dots x_{n+1}))$$

DIM: Se $P = \mathcal{L}((x_2 \dots x_{n+1}))$ con $(x_2 \dots x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{P} = \overline{\mathcal{L}((x_2 \dots x_{n+1}))} = \mathcal{L}(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n+1}) =$$
$$= \mathcal{L}((x_2 \dots x_{n+1})) = P$$

Valgono: Sia $P = \bar{P} \Rightarrow \mathcal{L}((x_2 \dots x_{n+1})) = \mathcal{L}(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n+1})$

$\Rightarrow$ Distinguiamo 2 casi:

$$a) (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n+1}) = - (x_1 \dots x_{n+1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x}_j = -x_j \quad \forall j \Rightarrow \bar{x}_j = -y_j \quad y_j \in \mathbb{R} \\ \forall j$$

$$\Rightarrow P = [(x_1 \dots x_{n+1})] = [(y_1 \dots y_{n+1})] \text{ con} \\ (y_1 \dots y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$b) (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n+1}) \neq - (x_1 \dots x_{n+1}) \Rightarrow P \neq \bar{P}$$

$$\Rightarrow (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n+1}) \in \mathcal{L}((x_1 \dots x_{n+1})) \Rightarrow$$

$$0 \notin (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n+1}) + (x_1 \dots x_{n+1}) \in \mathcal{L}((x_1 \dots x_{n+1})) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}((\bar{x}_1 + x_1 \dots \bar{x}_{n+1} + x_{n+1})) = \mathcal{L}(x_1 \dots x_{n+1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(x_1 + x_1 \dots \bar{x}_{n+1} + x_{n+1})] = [(x_1 \dots x_{n+1})]$$

$$\text{e } (\bar{x}_1 + x_1 \dots \bar{x}_{n+1} + x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

CORRISPONDENZA 1-1 fra

punti di $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ $\longleftrightarrow$ punti reali di $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$

l'immagine di una curva (varieta) in $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ corrisponde ai punti reali della corrispondente curva (varieta) in $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$.

$$\pi: 3x + 2y + 5 = 0$$

$$\hat{\pi} \quad 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$$

$$\longrightarrow 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 0$$

in $\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$

$$[(0,0,1)]$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 0$$



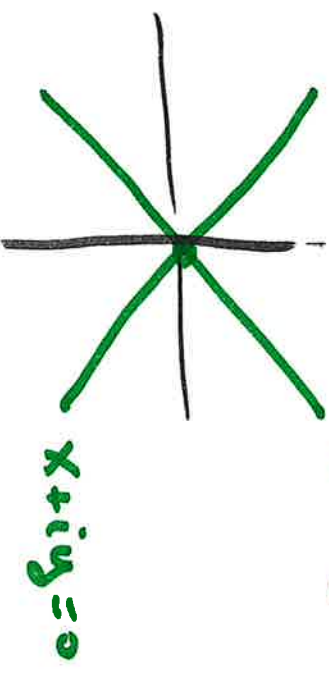
$$x^2 + y^2 = 0$$

$$(x + iy)(x - iy) = 0$$

$$[(1, -i, 0)]$$

$$[(1, i, 0)]$$

$$x - iy = 0$$



2 rette immaginarie
che si intersecano
in $(0,0)$.

In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ $(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = 0$

$$[(1, i, 0)] \quad [(1, -i, 0)]$$

$$x^2 + y^4 = 0$$

$$[(0,0,1)]$$

su $\mathbb{C}$

Insieme
algebraico



ideali
radicali



insiemi definiti
da eq. algebriche



"equazioni
di grado n-1.
che descrivono
l'insieme"

$$x^2 + y^4 = 0$$

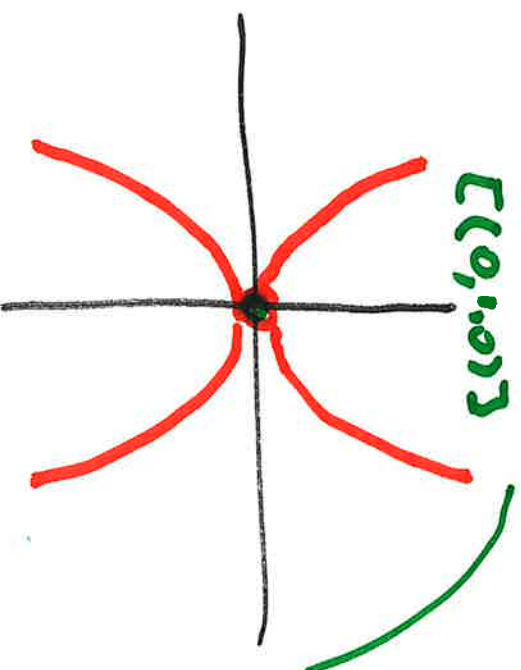
$$(x + 2iy^2)(x - 2iy^2) = 0$$



$$x_3^2 x_1^2 + x_2^4 = 0$$

$$(x_3 x_1 + 2i x_2^2)(x_3 x_1 - 2i x_2^2) = 0$$

$$[(0,0,0)]$$

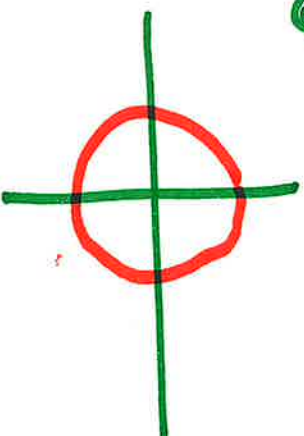


$$(x^2 + y^2)^3 = 1 \rightarrow (x_1^2 + x_2^2)^3 = x_3^6$$

$$(x^2 + y^2) = 1$$

$$(x_1^2 + x_2^2) = x_3^2$$

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 = 0$$



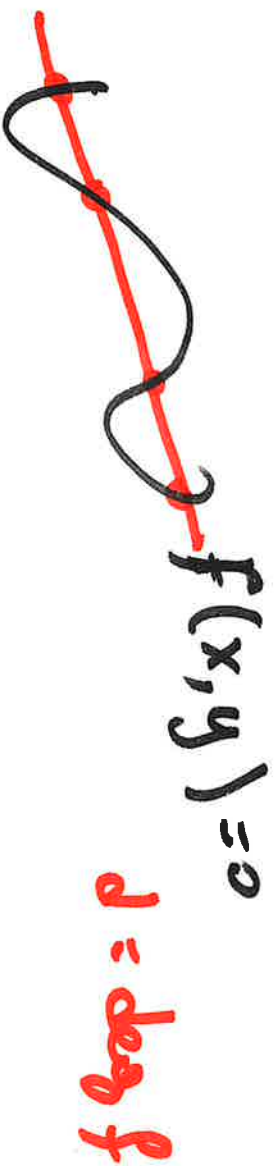
Teorema dell'ordine: Sia $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ un polinomio di grado almeno 1 e sia $F(x_1, x_2, x_3)$ la sua omogeneizzazione.

Allora posto $d = \deg f$ abbiamo che ogni retta di

$\mathbb{P}^2$ interessa la curva

$$\tilde{V}_c(F)$$

in esattamente d punti contati
con la opportuna molteplicità oppure
 $n_c \leq \tilde{V}_c(F)$.



→ Interpretazione geometrica del grado di una curva.

grado del polinomio $\longleftrightarrow$ # intersezioni di $\tilde{V}(F)$
 $f(x, y)$ con una retta non contenuta.

DIM SPAGLIA

$E: f(x,y)=0$: eq. affine delle curve

$\pi: y=ax+b$: eq. di una retta.

$$V(E) \cap V(\pi) \quad g(x) = f(x, ax+b)$$

osserviamo che $P \in \pi \Leftrightarrow P = (x, ax+b)$

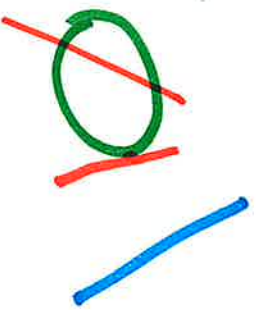
$$P \in E \cap \pi \Leftrightarrow g(x) = 0$$

2 possibilità: 1) $g(x) \equiv 0 \Rightarrow \forall P \in \pi: P \in E \Rightarrow \pi \subseteq E$.

$$2) g(x) \not\equiv 0 \Rightarrow \deg g(x) \leq \deg f(x)$$

e $g(x) = 0$ ha al più $\deg g(x)$ soluzioni

$$\Rightarrow |u \cap \pi| \leq \deg g(x) \leq \deg f$$



AGGIUNGERE IL TEOREMA

1) Lavoriamo su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ # radici: $g(x) = \deg g(x)$

Se ne può avere più che la radice di $g(x)$
ci siano tutte.

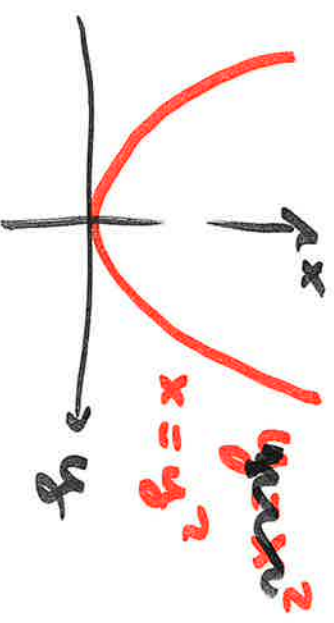
2) può capitare che $\deg g(x) < \deg f(x)$

$$g(x) \neq 0$$

$$x - y^2 = 0$$

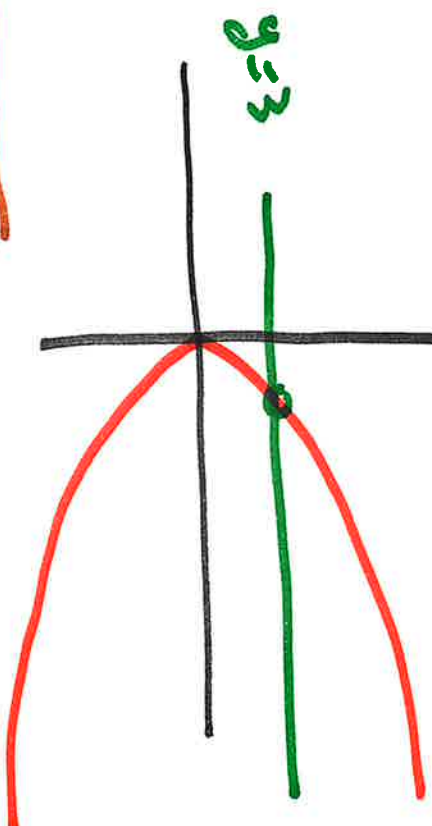
$$x = y^2$$

$$y = x^2$$



$$y = ax + b$$

$$\begin{cases} x_1 x_2 = x_2^2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 0 \quad [(1, 0, 0)]$$



$$x = y^2$$

$$y = ax + b$$

$$y = 3$$

$$x = 9$$

$$\begin{cases} x_1 x_3 - x_2^2 = 0 \\ 3x_3 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 x_3 - 9x_3^2 = 0$$

$$x_3(x_1 - 9x_3) = 0 \quad x_3(x_1 - 9x_3) = 0$$

$$[(1, 0, 0)]; \quad [\cancel{(1, 3, 9)}] = [\cancel{(9, 3, 1)}]$$

$$[(9, 3, 1)]$$

In $A_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ il teorema non funziona in generale.

$$|E_n \pi| \leq \deg f$$

$$x = (ax + b)^2 \quad a \neq 0$$

eq. di II grado in x .